Universidad Mariano Gálvez
Estadística y probabilidad para Ingeniería
Sección B.

UNIDAD 2

PROBABILIDAD

PRESENTA

DRA. EN ING. RITA VICTORIA DE LEÓN ARDÓN

(R) DE LEÓN, 2016.

INCERTIDUMBRE

- Falta de seguridad, de confianza o de certeza sobre algo.
- La imperfección en el conocimiento sobre el estado o los procesos de la naturaleza.

(R) DE LEÓN, 2016.

PROBABILIDAD

- Un marco conceptual para manejar la incertidumbre.
- Supone la existencia de información perfecta.
- La **probabilidad** es un método por el cual se obtiene la frecuencia de un acontecimiento determinado mediante la realización de experimentos aleatorios, de los que se conocen todos los resultados posibles, bajo condiciones *suficientemente* estables.

(R) DE LEÓN, 2016.

Espacio muestral

Experimento

(R) DE LEÓN, 2016.

EXPERIMENTO

- Algo que pasa, ejemplo: tirar un dado.

(R) DE LEÓN, 2016.

ESPACIO MUESTRAL: LISTA DE TODO LO QUE PUEDE PASAR

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

C

E

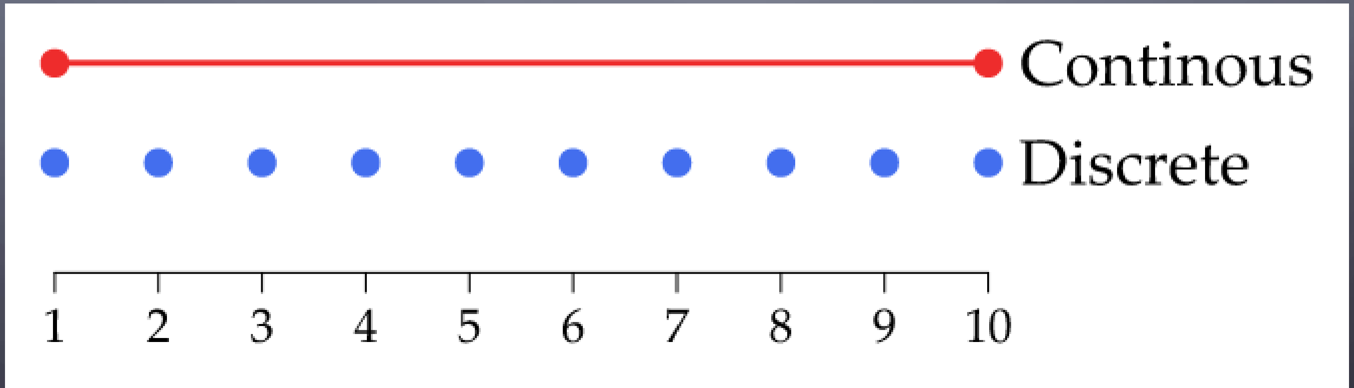
1
2
3
4
5
6

J
.
.
.
.
.
.
.M

(R) DE LEÓN, 2016.

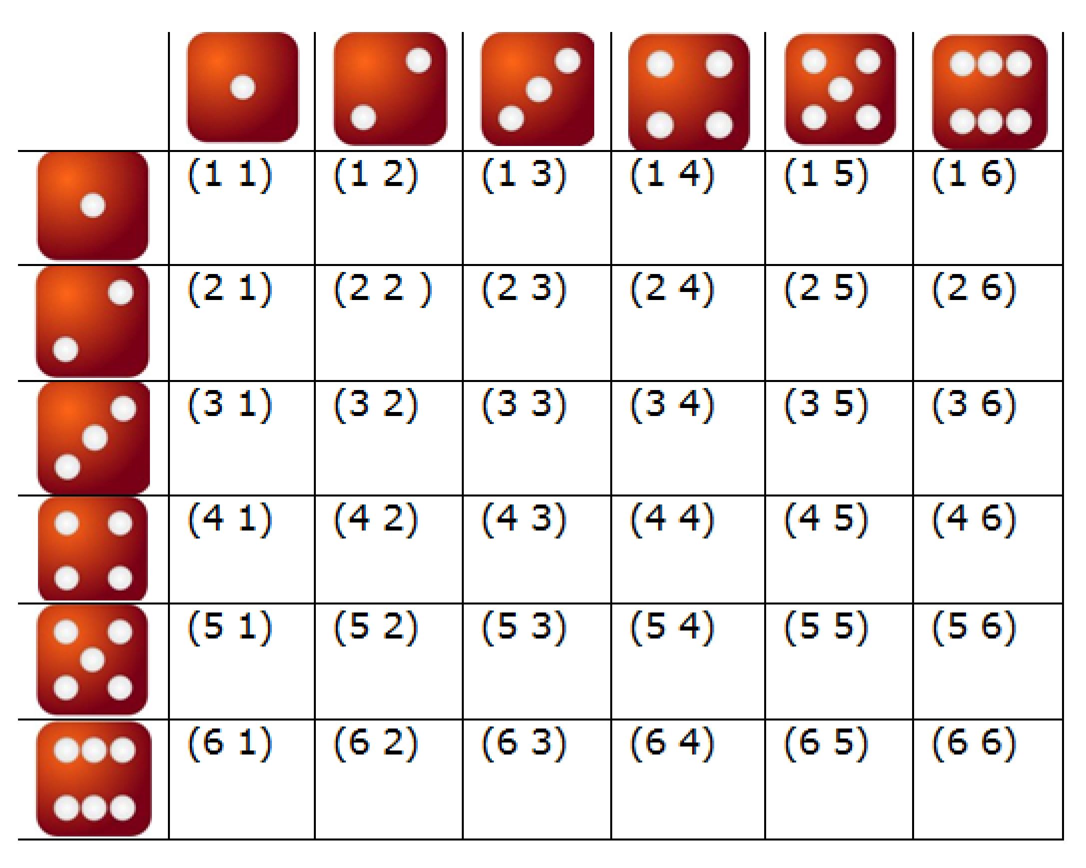
TIPOS DE ESPACIOS MUESTRALES

- Discretos: son aquellos espacios donde el número de sucesos elementales es finito. Ejemplo: dados y monedas
- Continuos: espacios en donde el número de sucesos elementales es infinito. Ejemplo: estatura, longitud de las olas del mar, temperatura.



(R) DE LEÓN, 2016.

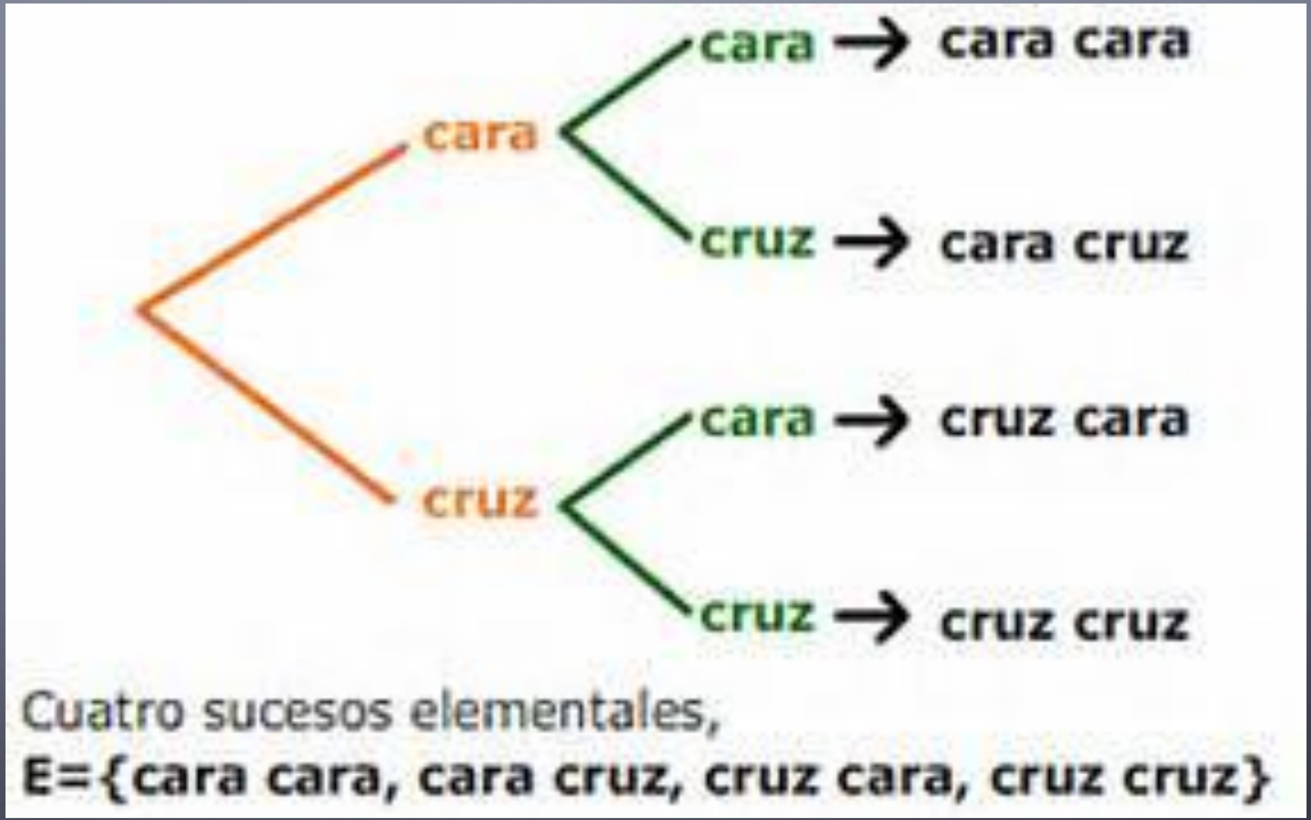
ESPACIO MUESTRAL DE UN DADO



	(1 1)	(1 2)	(1 3)	(1 4)	(1 5)	(1 6)
	(2 1)	(2 2)	(2 3)	(2 4)	(2 5)	(2 6)
	(3 1)	(3 2)	(3 3)	(3 4)	(3 5)	(3 6)
	(4 1)	(4 2)	(4 3)	(4 4)	(4 5)	(4 6)
	(5 1)	(5 2)	(5 3)	(5 4)	(5 5)	(5 6)
	(6 1)	(6 2)	(6 3)	(6 4)	(6 5)	(6 6)

(R) DE LEÓN, 2016.

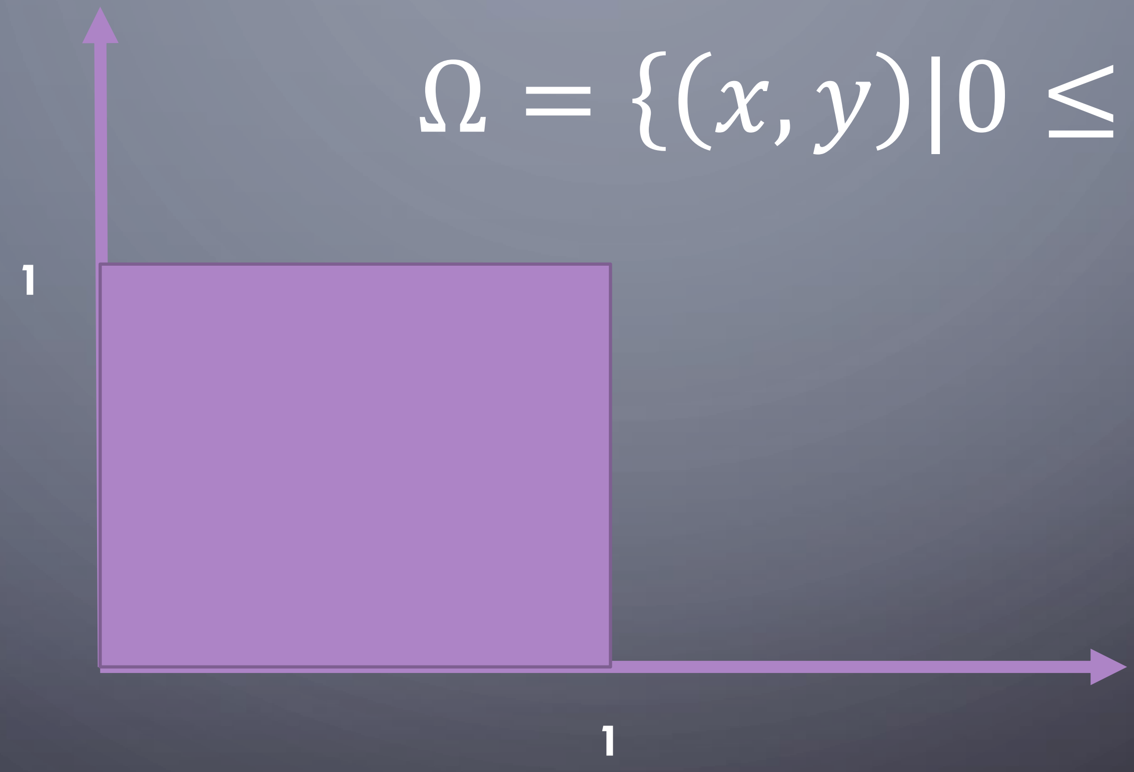
DIAGRAMAS DE ÁRBOL



(R) DE LEÓN, 2016.

ESPACIO CONTINUO DE PROBABILIDAD

$$\Omega = \{(x, y) | 0 \leq x, y \leq 1\}$$



COLECTIVAMENTE EXHAUSTIVO

- No importa lo que pase voy a tener una de las salidas no olvido a nadie.

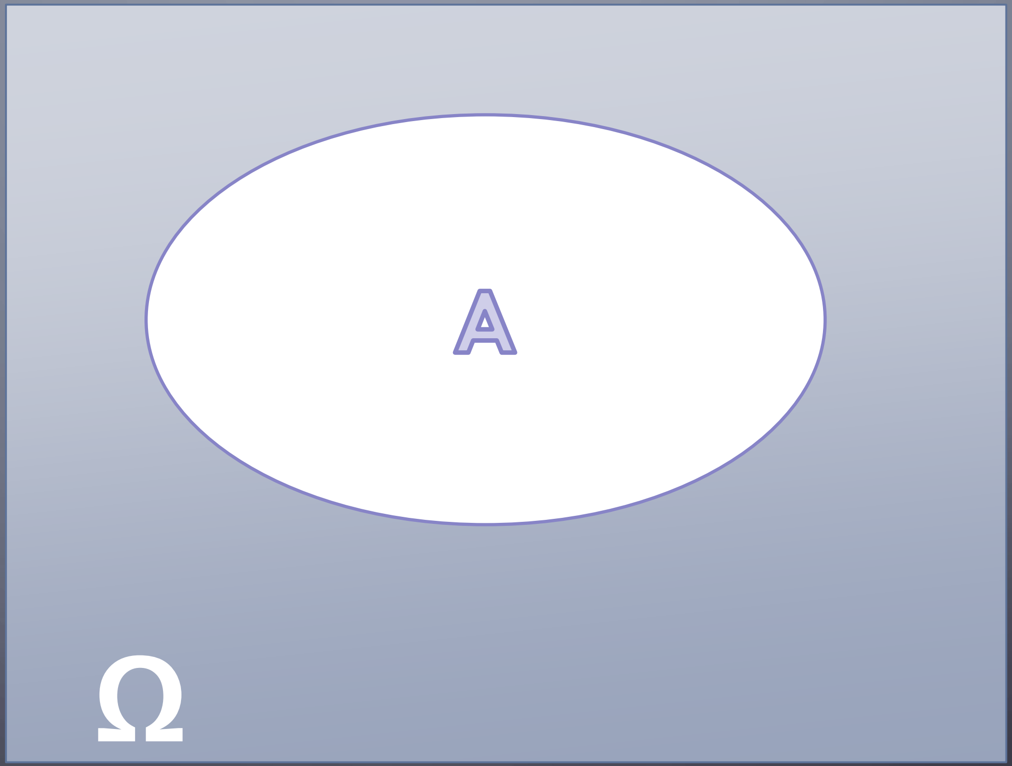
MUTUAMENTE EXCLUYENTES

Si un resultado se obtiene no se puede obtener otro.

(R) DE LEÓN, 2016.

EVENTO

- Subconjunto del espacio muestral.



(R) DE LEÓN, 2016.

AXIOMAS DE LA PROBABILIDAD

1) P(Ω)= 1

2) 0 ≤P(A) ≤1

3) Para dos eventos A1 y A2 independientes $E_1 \cap E_2 = \emptyset$

$$\mathrm{P}(E_1 \cup A_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

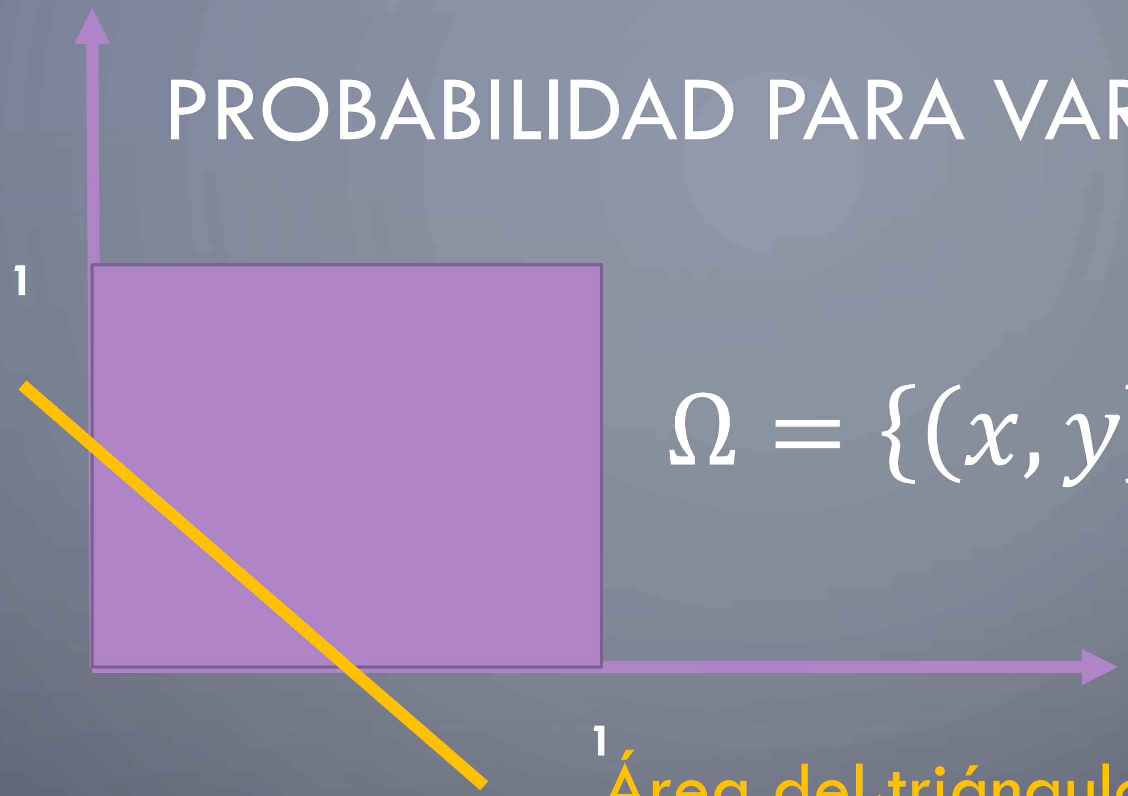
(R) DE LEÓN, 2016.

LEY UNIFORME PARA DATOS DISCRETOS

- Todas las salidas tienen la misma probabilidad

$$P(A) = \frac{\#\ de\ elementos\ de\ A}{\#\ total\ de\ puntos\ de\ muestreo}$$

PROBABILIDAD PARA VARIABLES CONTINUAS

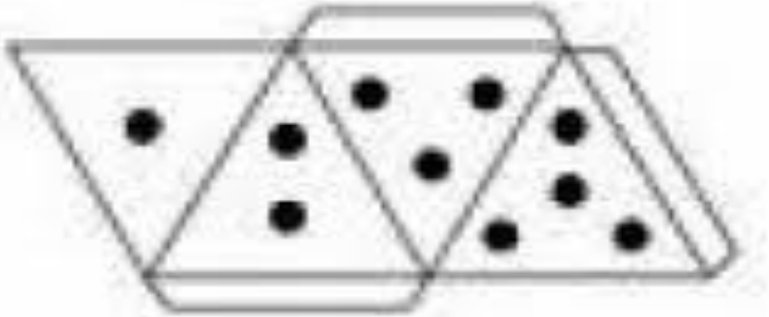


$$\Omega = \{(x, y)|0 \leq x, y \leq 1\}$$

$$\mathbf{P(x+y} \leq \mathbf{0.5)} = \overbrace{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}^{\text{Área del triángulo}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}$$

$$\mathbf{P(x,y)=(0.5, 0.3)} = \mathbf{0}$$

(R) DE LEÓN, 2016.

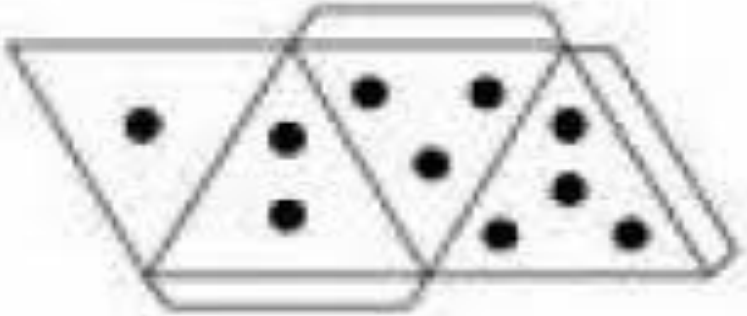


Y				
4				
3				
2				
1				
	1	2	3	4
				x

P(X,1)=(1,1) ó (1,2)=
P(x=1)=
P(x+y) impar=
P(min (x,y))=2

(R) DE LEÓN, 2016.

Que el mínimo de los dos pares de números sea igual a 2.
Ver donde esta la X para la respuesta.



Y

4		X		
3		X		
2		X	X	X
1				
	1	2	3	4

P(X,1)=(1,1) ó (1,2)= 2/16

P(x=1)=4/16

P(x+y) impar=8/16

P(min (x,y))=5/16

(R) DE LEÓN, 2016.

Que el mínimo de los dos pares de números sea igual a 2.
Ver donde esta la X para la respuesta.

Reglas de probabilidad

Reglas I. $0 \leq P(A) \leq 1$ Para cualquier evento

Reglas II. $P(S) = 1$

Reglas III. Regla de suma — Si A y B son eventos disjuntos

$$P(A \text{ O } B) = P(A) + P(B)$$

Reglas IV. Regla de complemento. Para cualquier evento A

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

Reglas V. Regla de Multiplicación — Si A y B son eventos independientes

$$P(A \text{ Y } B) = P(A)P(B)$$

(R) DE LEÓN, 2016.

EL ESPACIO MUESTRAL, A VECES ES MUY GRANDE Y HAY QUE USAR:

Permutaciones

Muestras con orden y sin reemplazo

Combinaciones

Muestras sin orden y sin reemplazo

(R) DE LEÓN, 2016.

PERMUTACIÓN

- Un arreglo de un conjunto de objetos.
- Si importa el orden

El número de permutaciones de n objetos distintos tomados de r a la vez es

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Para cualquier entero no negativo n, $n!$, denominado "n factorial" se define como

$$N! = n(n-1) \ldots (2)(1),$$

con el caso especial de $0! = 1$.

(R) DE LEÓN, 2016.

COMBINACIÓN

- Un arreglo de un conjunto de objetos.
- No importa el orden

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

El número de combinaciones de n objetos distintos tomados de k a la vez.

(R) DE LEÓN, 2016.

Muestras	con reemplazo	sin reemplazo
con orden	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$
sin orden	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

(R) DE LEÓN, 2016.

PROBABILIDAD CONDICIONAL

- La probabilidad de que ocurra un evento B cuando se sabe que ya ocurrió algún evento A se llama probabilidad condicional y se denota con P (B|A). El símbolo P(B|A) por lo general se lee como “la probabilidad de que ocurra B, dado que ocurrió A”, o simplemente, la probabilidad de B dado A.

La probabilidad condicional de B, dado A, que se denota con $P(B|A)$, se define como

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \text{ siempre que } P(A) > 0.$$

(R) DE LEÓN, 2016.

$P(D|N)=0.05$

$P(D|R)=0.25$

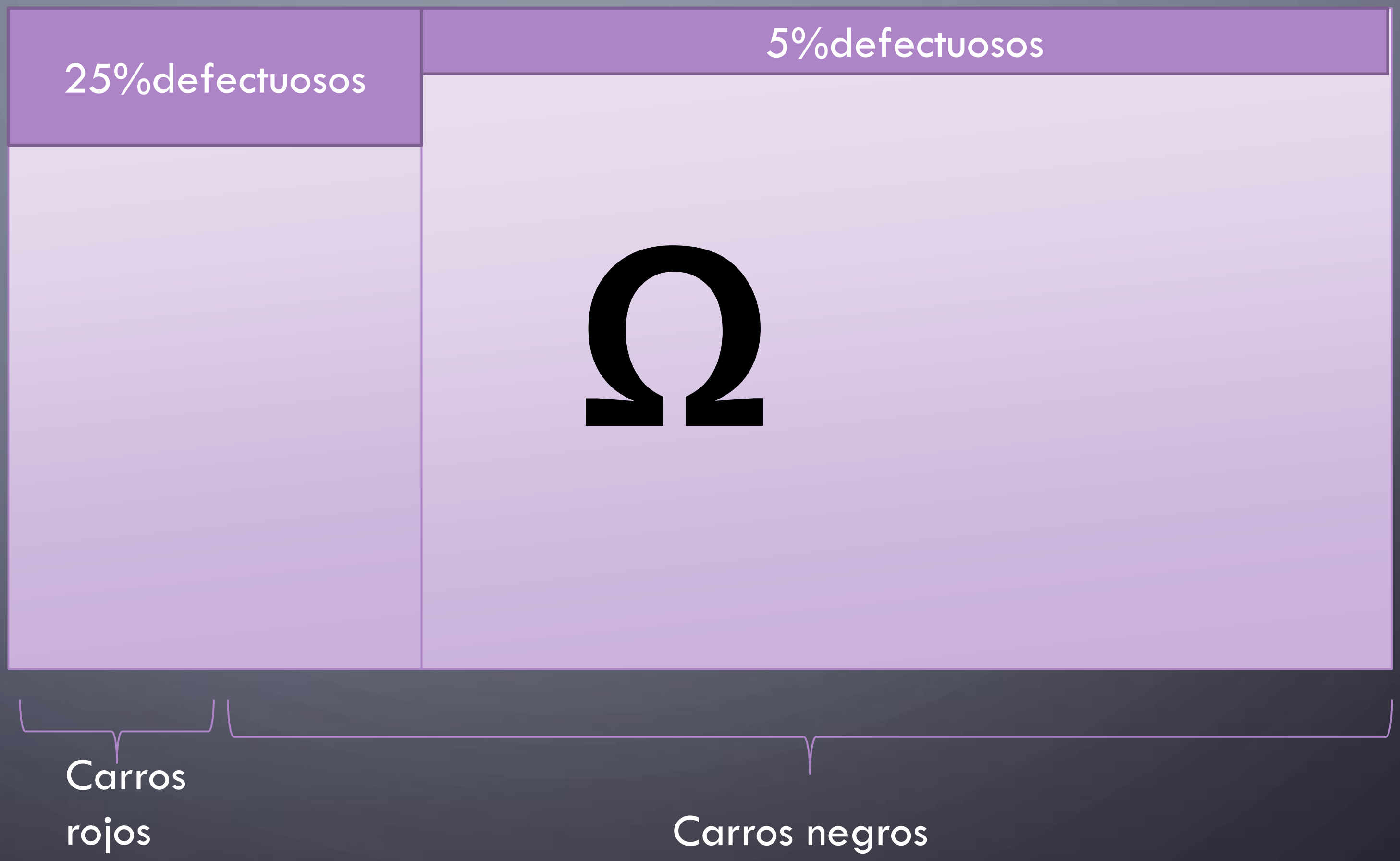


Tabla 2.1: Clasificación de los adultos de una pequeña ciudad

	Empleado	Desempleado	Total
Hombre	460	40	500
Mujer	140	260	400
Total	600	300	900

Se seleccionará al azar a uno de estos individuos para que realice un viaje a través del país con el fin de promover las ventajas de establecer industrias nuevas en la ciudad. Nos interesaremos en los eventos siguientes:

M: se elige a un hombre,

E: el elegido tiene empleo.

Sea $n(A)$ el número de elementos en cualquier conjunto A. Podemos utilizar esta notación, puesto que cada uno de los adultos tiene las mismas probabilidades de ser elegido, para escribir

$$P(M|E) = \frac{n(E \cap M)}{n(E)} = \frac{n(E \cap M)/n(S)}{n(E)/n(S)} = \frac{P(E \cap M)}{P(E)},$$

en donde $P(E \cap M)$ y $P(E)$ se calculan a partir del espacio muestral original S. Para verificar este resultado observe que

$$P(E) = \frac{600}{900} = \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad P(E \cap M) = \frac{460}{900} = \frac{23}{45}.$$

Por lo tanto,

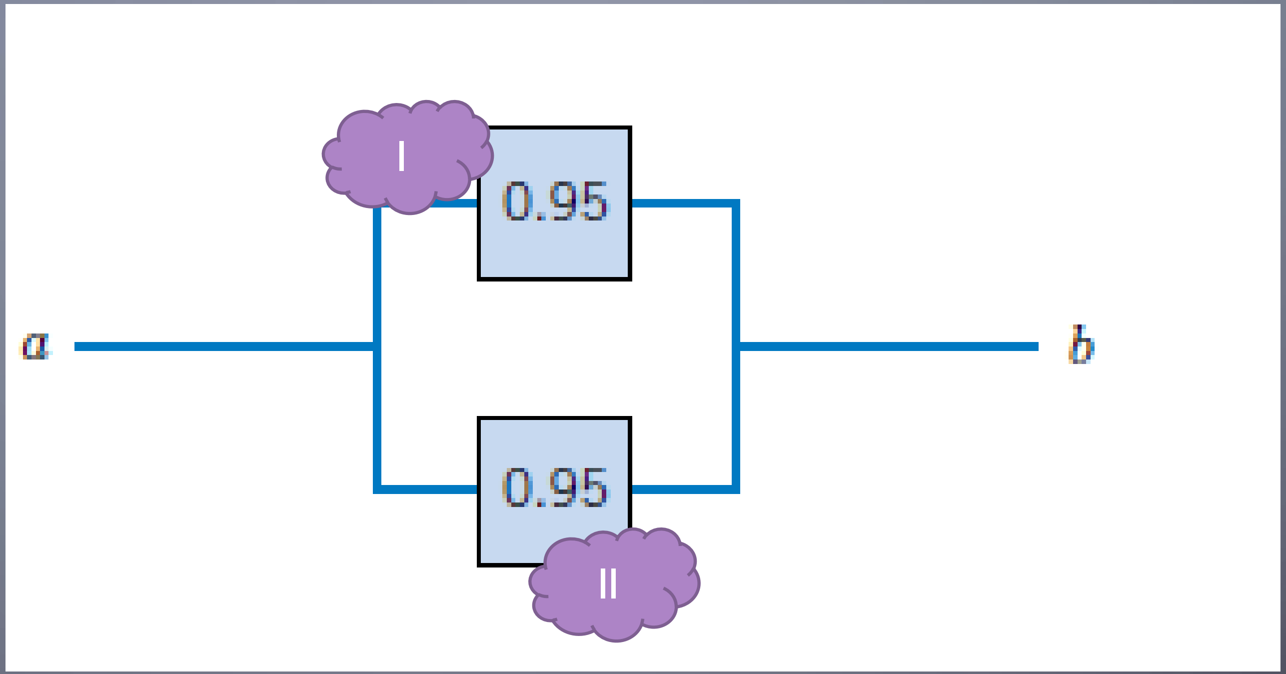
$$P(M|E) = \frac{23/45}{2/3} = \frac{23}{30},$$

(R) DE LEÓN, 2016.

PROBABILIDAD CONDICIONAL

Un sistema eléctrico consta de cuatro componentes, como se ilustra en la figura 2.9. El sistema funciona si los componentes A y B funcionan, y si funciona cualquiera de los componentes C o D. La confiabilidad (probabilidad de que funcionen) de cada uno de los componentes también se muestra en la figura 2.9. Calcule la probabilidad de *a*) que el sistema completo funcione y de *b*) que el componente C no funcione, dado que el sistema completo funciona. Suponga que los cuatro componentes funcionan de manera independiente.

(R) DE LEÓN, 2016.



Probabilidad= Funcione I o Funcione II o Funcionen ambos

Probabilidad=0.95+0.95-0.9025=0.9975

(R) DE LEÓN, 2016.

PROBABILIDAD CONDICIONAL

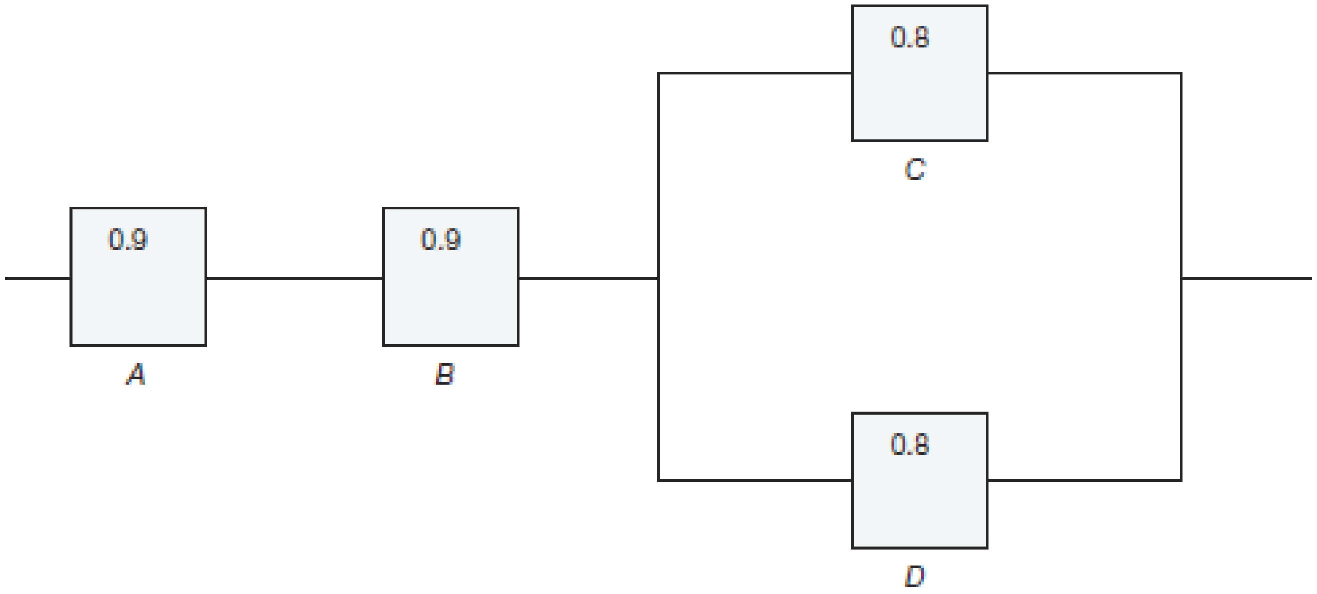


Figura 2.9: Un sistema eléctrico para el ejemplo 2.39.

(R) DE LEÓN, 2016.

a) Es evidente que la probabilidad de que el sistema completo funcione se puede calcular de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} P[A \cap B \cap (C \cup D)] &= P(A)P(B)P(C \cup D) = P(A)P(B)[1 - P(C' \cap D')] \\ &= P(A)P(B)[1 - P(C')P(D')] \\ &= (0.9)(0.9)[1 - (1 - 0.8)(1 - 0.8)] = 0.7776. \end{aligned}$$

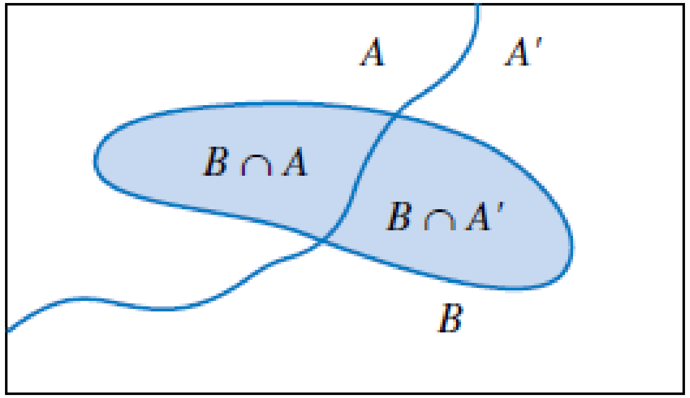
Las igualdades anteriores son válidas debido a la independencia entre los cuatro componentes.

b) Para calcular la probabilidad condicional en este caso, observe que

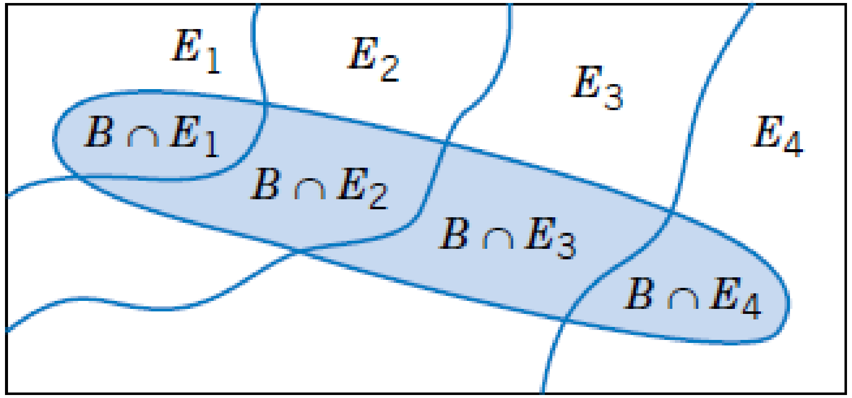
$$\begin{aligned} P &= \frac{P\,(\text{el sistema funciona pero } C \text{ no funciona})}{P\,(\text{el sistema funciona})} \\ &= \frac{P\,(A \cap B \cap C' \cap D)}{P\,(\text{el sistema funciona})} = \frac{(0.9)(0.9)(1 - 0.8)(0.8)}{0.7776} = 0.1667. \end{aligned}$$

(R) DE LEÓN, 2016.

PROBABILIDAD TOTAL



Partición un evento en dos eventos mutuamente excluyentes



$$B = (B \cap E_1) \cup (B \cap E_2) \cup (B \cap E_3) \cup (B \cap E_4)$$

Partición de un evento en eventos mutuamente excluyentes

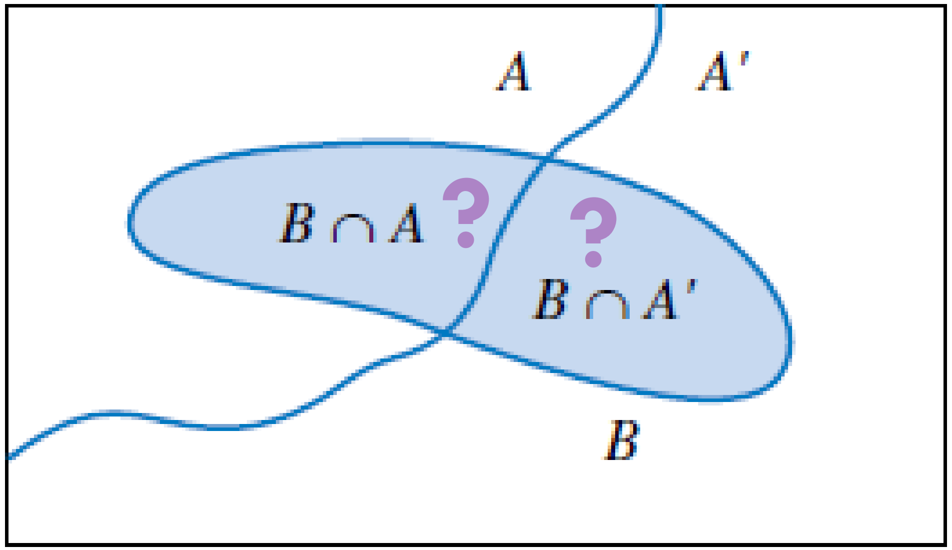
(R) DE LEÓN, 2016.

PROBABILIDAD TOTAL

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A') = P(B|A)P(A) + P(B|A')P(A')$$

La probabilidad condicional de B, dado A, que se denota con $P(B|A)$, se define como

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \text{ siempre que } P(A) > 0.$$



K=$P(B \cap A)$/P(A)

P(B|A)=$P(B \cap A)$/P(A)

P(B|A´)=$P(B \cap A')$/P(A´)

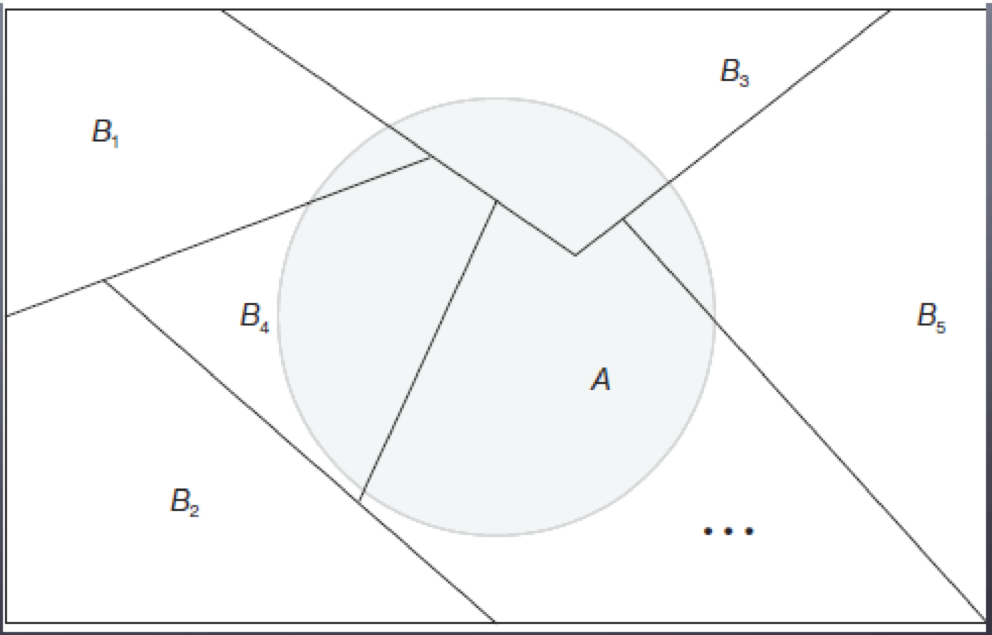
(R) DE LEÓN, 2016.

P(B|A´)P(A´)+P(B|A)P(A)= P(B)

PROBABILIDAD TOTAL

Si los eventos B_1, B_2,... B_k constituyen una partición del espacio muestral S, tal que $P(B_i) \neq 0$ para $i = 1, 2,..., k$, entonces, para cualquier evento A de S,

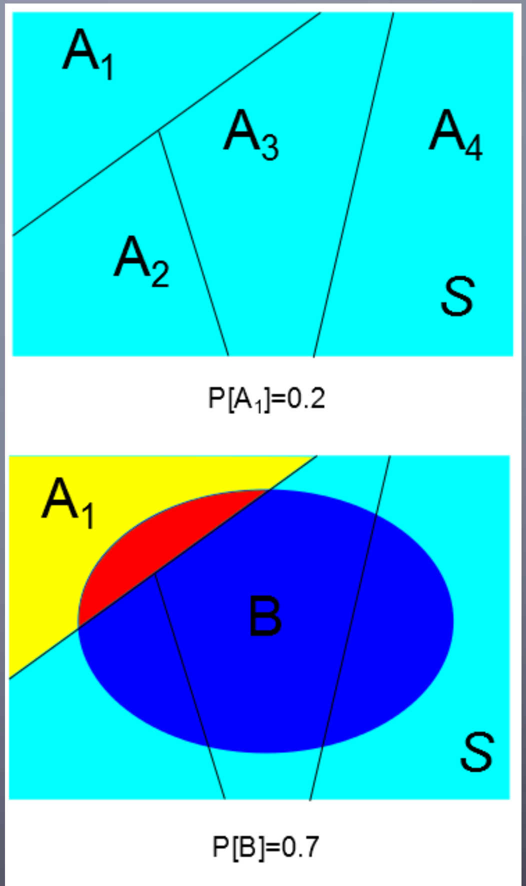
$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A|B_i).$$

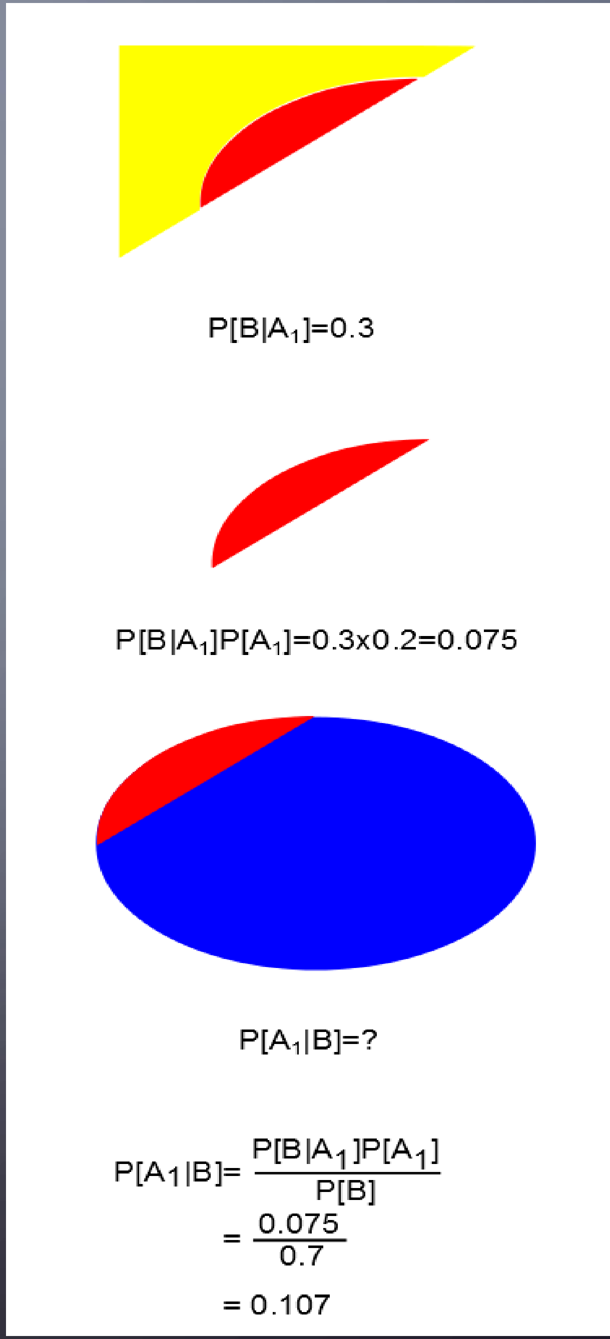


(R) DE LEÓN, 2016.

TEOREMA DE BAYES

$$P(A\,|\,B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$





(R) DE LEÓN, 2016.

GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE BAYES

(Regla de Bayes) Si los eventos $B_1, B_2, \ldots, B_k$ constituyen una partición del espacio muestral S, donde $P(B_i) \neq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, k$, entonces, para cualquier evento A en S, tal que $P(A) \neq 0$,

$$P(B_r|A) = \frac{P(B_r \cap A)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i \cap A)} = \frac{P(B_r)P(A|B_r)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A|B_i)} \quad \text{para} \quad r = 1, 2, \ldots, k.$$

(R) DE LEÓN, 2016.