PROBABILIDAD: ANTECEDENTES

ING. RITA DE LEÓN


Probabilidad
población
Muestra
Inferencia
Estadística

Recolección de datos → Análisis de datos

Medición
Variabilidad

Elaboración de gráficas
Aplicación métodos estadísticos y/o probabilísticos.

ELABORACIÓN DE GRÁFICAS

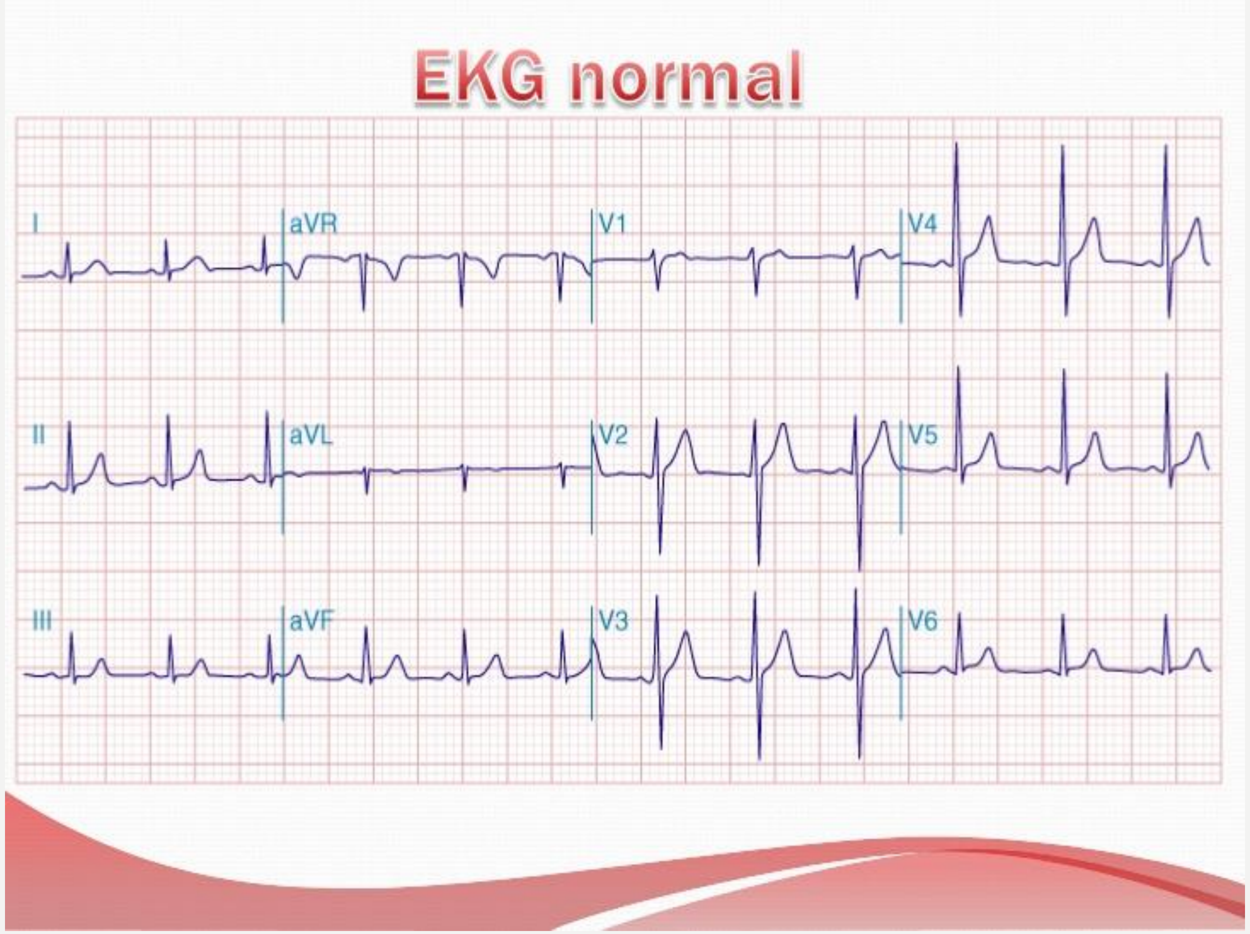
Recubrimiento	Humedad	Promedio de corrosión en miles de ciclos hasta la ruptura
Sin recubrimiento	20%	975
	80%	350
Con recubrimiento químico contra la corrosión	20%	1750
	80%	1550

Sin nitrógeno	Con nitrógeno
0.32	0.26
0.53	0.43
0.28	0.47
0.37	0.49
0.47	0.52
0.43	0.75
0.36	0.79
0.42	0.86
0.38	0.62
0.43	0.46

Porcentaje del algodón	Resistencia a la tensión
15	7, 7, 9, 8, 10
20	19, 20, 21, 20, 22
25	21, 21, 17, 19, 20
30	8, 7, 8, 9, 10

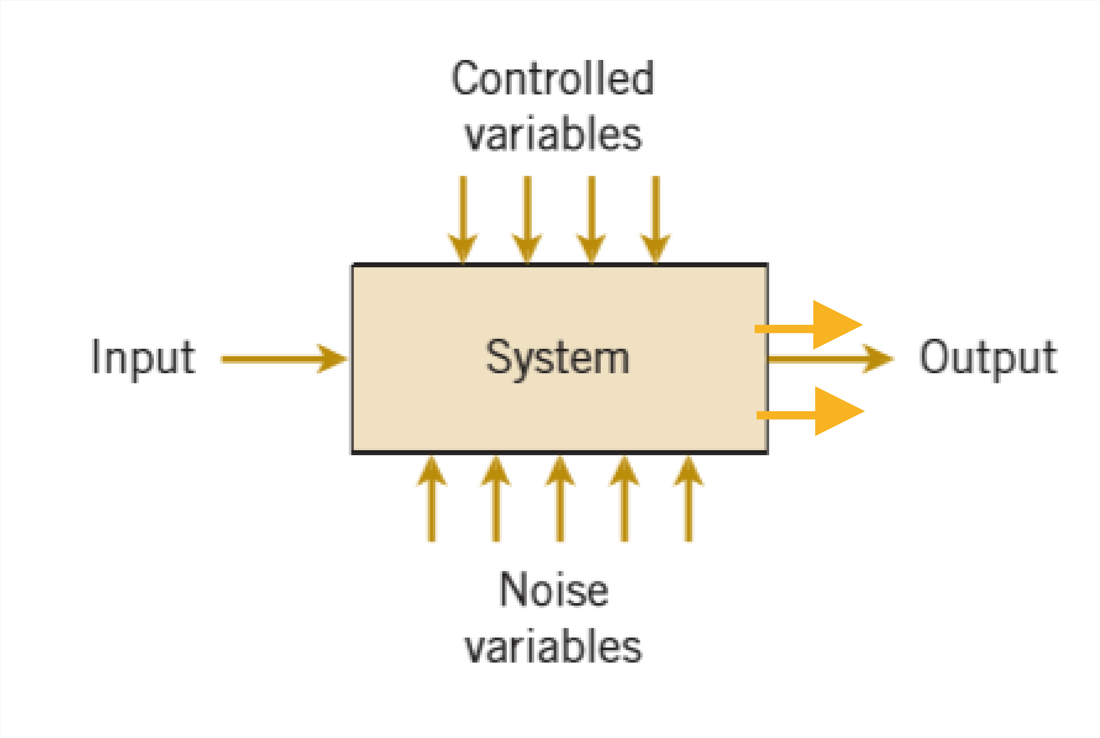
VARIABILIDAD

La variabilidad de una muestra desempeña un papel importante en el análisis de datos. La variabilidad de procesos y productos es un hecho real en los sistemas científicos y de ingeniería: el control o la reducción de la variabilidad de un proceso a menudo es una fuente de mayores dificultades



EXPERIMENTOS ALEATORIOS

- Un experimento que produce diferentes resultados aunque sea repetido de la misma manera cada vez.



ESPACIO MUESTRAL

- Es el conjunto de todas las posibles repuestas de un experimento aleatorio.
- El espacio muestral de un dado es 1,2,3,4,5,6.

ESPACIOS MUESTRALES DISCRETOS Y CONTINUOS

- Discretos: salidas finitas
- Continuos: salidas infinitas

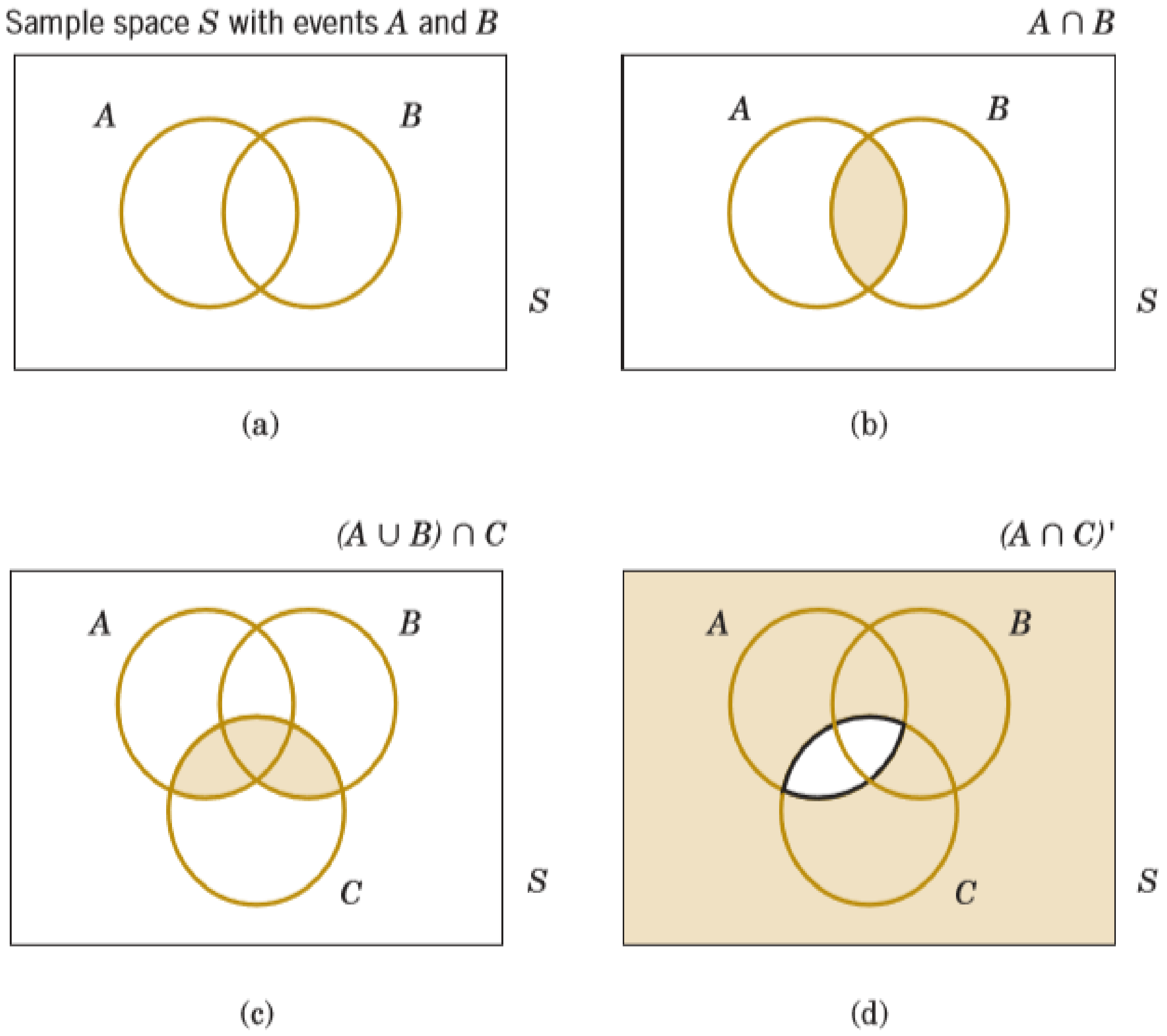
EVENTO

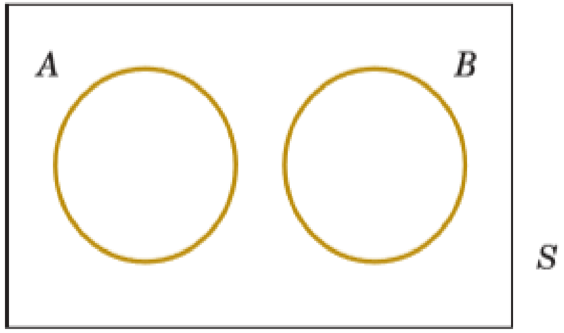
- Es un subconjunto del espacio muestral.
- En un dado un evento puede ser obtener sólo números pares.

EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES

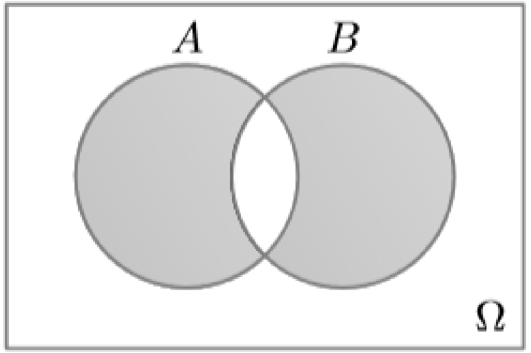
- Son aquellos que no tienen elementos en común.

$$E_1 \cap E_2 = \varnothing$$


Sample space S with events A and B
A
B
S
(a)
$A \cap B$
A
B
S
(b)
$(A \cup B) \cap C$
A
B
C
S
(c)
$(A \cap C)'$
A
B
C
S
(d)


A
B
S

DIFERENCIA DE CONJUNTOS



$A \triangle B$

Figura 1.3

Recordemos además las muy útiles leyes de De Morgan[2]:

$$
\begin{aligned}
(A \cup B)^c &= A^c \cap B^c, \\
(A \cap B)^c &= A^c \cup B^c.
\end{aligned}
$$

$$A \triangle B = (A \cup B) - (B \cap A)$$

CONJUNTO POTENCIA

Conjunto potencia

El conjunto potencia de Ω, denotado por 2^Ω, es aquel conjunto constituido por todos los subconjuntos posibles de Ω. En términos estrictos, esta nueva colección deja de ser un conjunto y se le llama clase de subconjuntos de Ω, aunque seguiremos usando el primer término en nuestro tratamiento elemental de conjuntos. Por ejemplo, si $\Omega = \{a, b, c\}$, entonces el conjunto 2^Ω consta de 8 elementos, a saber,

$$2^\Omega = \Big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega\Big\}.$$

CONJUNTO POTENCIA

$$\#(2^{\Omega}) = 2^{\#\Omega},$$

es decir, el número de elementos en el conjunto 2^{Ω} es exactamente 2 elevado a la potencia dada por la cardinalidad de Ω. De este hecho proviene la notación usada para el conjunto potencia. Observe que la expresión 2^{Ω} no tiene el significado matemático del número 2 elevado a la potencia Ω, pues ello no tiene sentido. Debe considerarse, por lo tanto, como un símbolo para denotar al conjunto potencia y que ayuda a recordar el número de elementos en dicha clase. Para el ejemplo anterior se comprueba que la cardinalidad de 2^{Ω} es efectivamente $2^{\#\Omega} = 2^3 = 8$.

LEYES DE MORGAN

$$(E')' = E$$

Ley de distribución

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \quad \text{and} \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

Leyes de Morgan

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \quad \text{and} \quad (A \cap B)' = A' \cup B'$$

Otras leyes

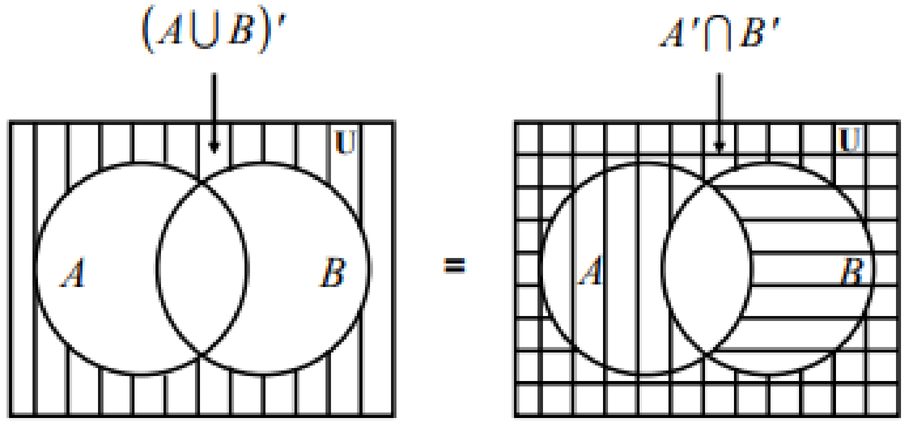
$$A \cap B = B \cap A \quad \text{and} \quad A \cup B = B \cup A$$

LEYES DE MORGAN

Estas leyes establecen los complementos de la unión e intersección entre conjuntos:

Primera ley. El complemento de la unión de dos conjuntos es la intersección de sus complementos.

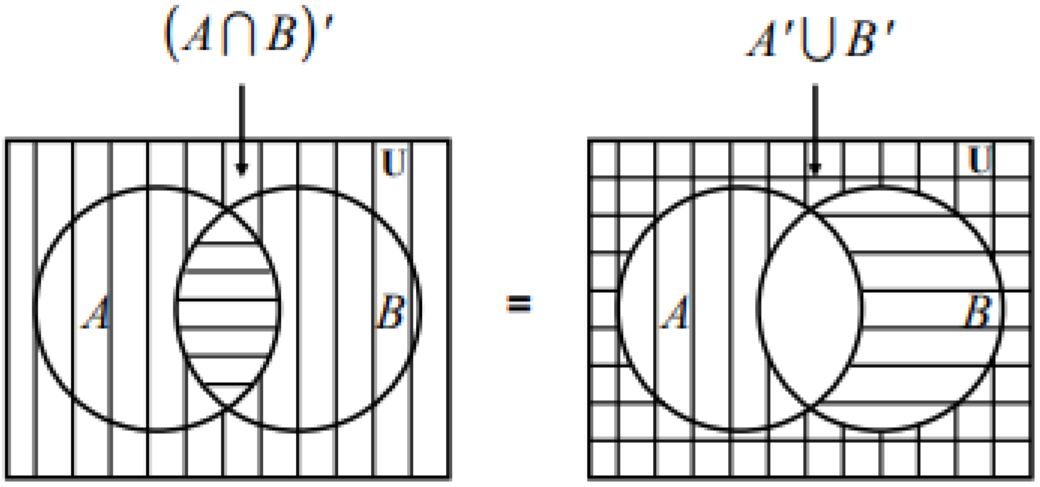
$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$



LEYES DE MORGAN

Segunda ley. El complemento de la intersección de dos conjuntos es la unión de sus complementos:

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$



PRODUCTO CARTESIANO

El *producto cartesiano* de dos conjuntos A y B es el conjunto de todos los posibles pares ordenados que se forman eligiendo como primera componente a un elemento que pertenezca a A, y como segunda componente a un elemento que pertenezca a B.

El producto cartesiano se denota de la siguiente forma: $A \times B$ y se lee "A cruz B".

$$A \times B = \{ (x, y) \mid x \in A \text{ y } y \in B \}$$

La definición anterior expresa que el producto cartesiano de los conjuntos A y B, son la parejas ordenadas (x, y) tal que x pertenece al conjunto A y y pertenece al conjunto B.

CARDINALIDADES

Ejemplo.

Obtener el producto cartesiano $A \times B$ de los siguientes conjuntos:

$A = \{1,2,3\}$

$B = \{2,4,6,7\}$

Solución.

$A \times B = \{(1,2), (1,4), (1,6), (1,7), (2,2), (2,4), (2,6), (2,7), (3,2), (3,4), (3,6), (3,7)\}$

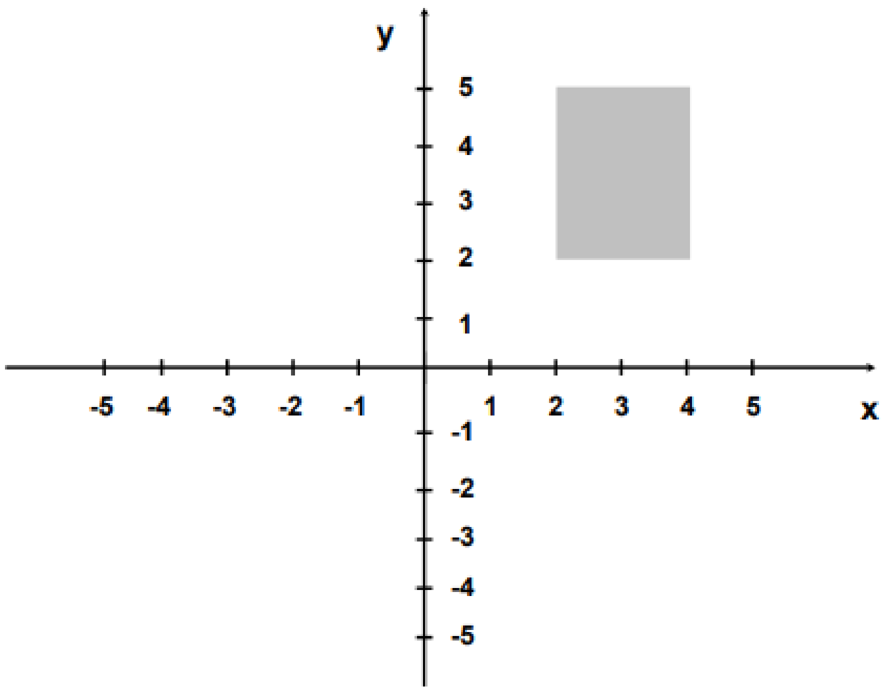
El número de parejas ordenadas que resultan de un producto cartesiano se obtiene multiplicando sus cardinalidades. En el ejemplo anterior, $\eta(A) = 3$ y $\eta(B) = 4$, el número de parejas ordenadas es: $(3)(4) = 12$.

La cardinalidad o número de elementos de ese conjunto puede estar establecido por el símbolo #A.

Ejemplo.

Sean los conjuntos $A = \{x \mid 2 \le x \le 4, \quad x \in \mathbf{R}\}$ y $B = \{y \mid 2 \le x \le 5, \quad y \in \mathbf{R}\}$, graficar el producto cartesiano $A \times B$

El conjunto solución a este producto cartesiano es una superficie plana de forma rectangular limitada tanto en x como en y. Gráficamente esto es:



1. Propiedades de identidad:

$$A \cup \phi = A$$
$$A \cup U = U$$
$$A \cap U = A$$
$$A \cap \phi = \phi$$

2. Propiedades de idempotencia:

$$A \cup A = A$$
$$A \cap A = A$$

3. Propiedades de complemento:

$$A \cup A' = U$$
$$A \cap A' = \phi$$

4. Propiedades asociativas:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

5. Propiedades conmutativas

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

6. Propiedades distributivas

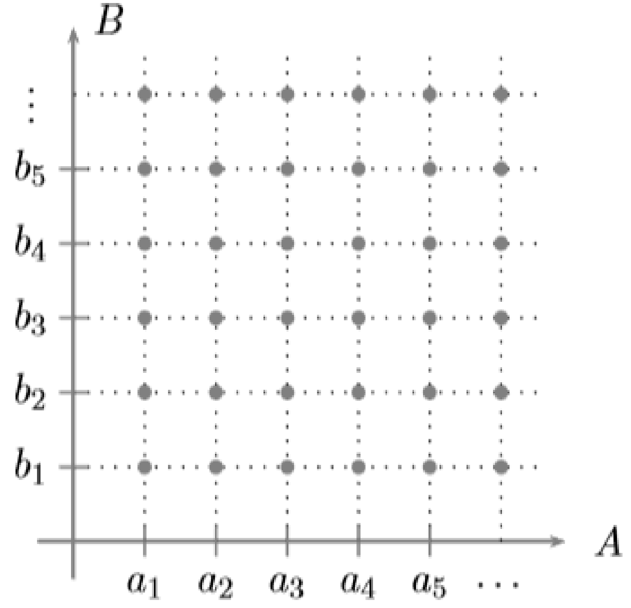
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

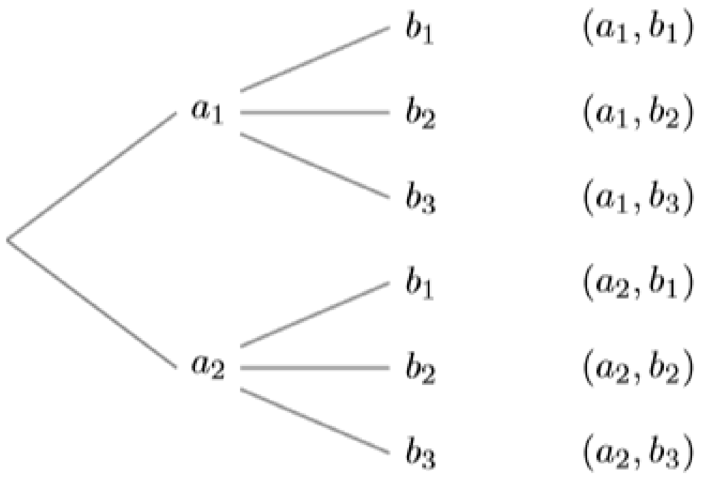
EJEMPLO

Ejemplo 1.6 Si $A = \{a_1, a_2\}$ y $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, entonces

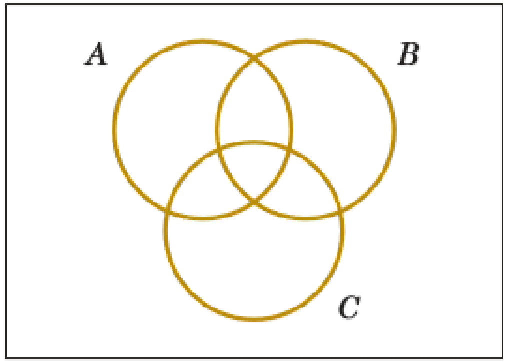
$$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3)\}.$$

Este conjunto puede representarse gráficamente como antes se mostró en la Figura 1.4 o bien mediante un diagrama de árbol como el que se ilustra en la Figura 1.5 .





EJERCICIO DE APLICACIÓN 1



En la siguiente figura, señale los siguientes eventos.

(a) A' (b) $A \cap B$ (c) $(A \cap B) \cup C$

(d) $(B \cup C)'$ (e) $(A \cap B)' \cup C$

EJERCICIO DE APLICACIÓN 2

		Resistencia a quebrarse	
		Alta	Baja
Resistencia a la ralladura	Alta	70	9
	Baja	16	5

Sea A el evento en que un disco tenga gran resistencia a quebrarse y B el evento en que el disco tenga gran resistencia. Determine $A \cap B$, A', and $A \cup B$.

EJERCICIO DE APLICACIÓN 3

1. Escribe lo siguiente en notación de conjuntos:

a) El conjunto de todos los números reales mayores que 27

b) El conjunto de todos los números reales mayores que 8 pero menores que 73

2. Dados los conjuntos $S_1 = (2, 4, 6)$, $S_2 = (7, 2, 6)$, $S_3 = (4, 2, 6)$, y $S_4 = (2, 4)$, ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

a) $S_1 = S_2$

b) $S_1 = R$

c) $5 \in S_2$

d) $3 \notin S_2$

e) $4 \notin S_4$

f) $S_4 \subset R$

g) $S_1 \supset S_4$

h) $\varnothing \subset S_2$

i) $S_3 \supset (1, 2)$

3. De acuerdo a los mismos conjuntos anteriores, encontrar:

a) $S_1 \cup S_2$

b) $S_1 \cup S_3$

c) $S_2 \cup S_3$

d) $S_2 \cup S_4$

e) $S_4 \cap S_2 \cap S_1$

f) $S_3 \cup S_1 \cup S_4$

EJERCICIO DE APLICACIÓN 4

4. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son válidas?

a) $A \cup A = A$

b) $A \cap A = A$

c) $A \cap \varnothing = A$

d) $A \cap U = U$

e) $A \cap \varnothing = \varnothing$

f) $A \cap U = A$

g) El complemento de A es A