Funciones de probabilidad discretas y continuas

Dra. En Ing. Rita de León

Variables discretas

Función de probabilidad para una variable discreta

Sea X una variable aleatoria discreta que toma los valores $x_1, x_2, \ldots$ con probabilidades respectivas $P(X = x_1), P(X = x_2), \ldots$. Esta lista de valores numéricos y sus probabilidades puede ser finita o bien infinita, pero numerable. La *función de densidad* de la variable X denotada por $f(x) : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ se define como sigue

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x) & \text{si } x = x_1, x_2, \ldots \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Recordemos que es importante poder distinguir entre X y x, pues conceptualmente son cosas muy distintas. Denotaremos generalmente a una función de densidad con la letra f minúscula de modo que el subíndice X nos ayuda a determinar que $f_X(x)$ es la función de densidad de la variable X. Esta notación será particularmente útil cuando consideremos varias variables aleatorias a la vez.

El conjunto de pares ordenados $(x, f(x))$ es una **función de probabilidad**, una **función de masa de probabilidad** o una **distribución de probabilidad** de la variable aleatoria discreta X si, para cada resultado x posible,

1. $f(x) \geq 0$,
2. $\sum_x f(x) = 1$,
3. $P(X = x) = f(x)$.

Esperanza

La esperanza de una variable aleatoria X cuya función de densidad es $f(x)$, es un número denotado por $E(X)$ que se calcula como sigue

$$\mathrm{E}(X) = \begin{cases} \displaystyle\sum_x x f(x) & \text{si } X \text{ es discreta,} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx & \text{si } X \text{ es continua.} \end{cases}$$

Momentos

- Investiga la definición de los momentos para variables discretas.

Discretas

Discretas

- Uniforme
- Bernoulli/Binomial
- Geométrica
- Hipergeométrica
- Poisson

Uniforme discreta

- A cada elemento se le asigna la misma probabilidad
- n elementos equiprobables

$$P(x_i) = \frac{1}{n}$$

n= elementos equiprobables

$$\mu(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$$

$$P(x \leq x_k) = \sum_{l=1}^{k} p(x_i) = k\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu_x)^2}{n}$$

Ejemplo uniforme discreta

- Se tiene un disco fijo y una flecha giratoria, el disco está dividido en 20 sectores de igual área. La posibilidad de quela flecha quede apuntando a cualquiera de los sectores (eliminando los casos cuand0 la flecha quede en el límite de dos sectores) es la misma e igual a 1/20

Ejercicio 1

- Elabore la representación tabular de la distribución uniforme
- Compruebe la función de densidad
- Elabore la gráfica acumulada correspondiente
- Obtenga la esperanza matemática
- Obtenga la variancia.

Bernoulli/Binomial

1. **Tipo de problema**

- Artículo defectuoso o no defectuoso
- Pasa corriente o no pasa
- 0 o 1
- Cara/escudo
- Éxito fracaso

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

x=0,1,2,3…n

2. Formulación

- Éxito p, fracaso q
- 1=p+q
- Se tienen n ensayos bajo unas mismas condiciones
- Independencia: ninguno de los n experimentos es afectado por otro.
- Consistencia: la probabilidad de éxito es la misma en cada uno de los n ensayos.

Ejemplo

- Diez por ciento de las herramientas producidas mediante cierto procedimiento tienen algún defecto. Calcular la probabilidad de que en una muestra de 10 unidades elegidas al azar exactamente 2 tengan algún defecto.
- $P(X = 2) = \binom{10}{2}(0.1)^2(0.9)^8 = 0.19$

Ejercicio 2

- El treinta por ciento de las herramientas producidas mediante cierto procedimiento tienen algún defecto. Calcular la probabilidad de que en una muestra de 8 unidades elegidas al azar exactamente 2 tengan algún defecto.

Ejercicio 3

Un estudiante presenta un examen de selección múltiple que contiene 8 preguntas, cada una con tres respuestas opcionales si se supone que el alumno está adivinando al responder cada problema, entonces la probabilidad de responder correctamente es de 1/3. Determinar la probabilidad:

a) De que responda incorrectamente a todas las preguntas.
b) La probabilidad de que apruebe si se requiere responder correctamente a seis o más preguntas.
c) La probabilidad de que las 8 preguntas las responda consecutivamente mal.

Distribución hipergeométrica

- Número de muestras distintas de tamaño n
- Se tiene un conjunto de N elementos (individuos u objetos) y que k de ellos poseen cierta característica y N-K no tienen esa característica.
- Sin reemplazo.

$$p(X = x) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

x=0,1,2,3…n

$$\mu(x) = n\left[\frac{k}{N}\right]$$

$$\sigma_x^2 = n\left[\frac{k}{N}\right] * \left[1 - \frac{k}{N}\right] * \left[\frac{N-n}{N-1}\right]$$

Ejemplo

- El dueño de una casa planta 6 bulbos seleccionados al azar de una caja que contiene 5 bulbos de tulipán y 4 de narciso. ¿Cuál es la probabilidad de que plante 2 bulbos de narciso y 4 de tulipán?
- K= 5 tulipán
- X=2

Ejercicio 1

- En una caja hay 10 esfera dos de ellas con premio. Se extraen aleatoriamente y sin reemplazo 4 de las esferas. Calcular de que esta muestra:
- a) no salga ningún premio
- b) salga un premio
- c) salga un premio o ninguno
- d) salgan dos premios

Respuestas

- En una caja hay 10 esfera dos de ellas con premio. Se extraen aleatoriamente y sin reemplazo 4 de las esferas. Calcular de que esta muestra:
- a) no salga ningún premio R.0.333
- b) salga un premio R.0.53333
- c) salga un premio o ninguno R.0.86666
- d) salgan dos premios R.0.1333

Ejercicio 2

- En una caja hay 20 mariposas dos de ellas en peligro de extinción. Se extrae una muestra de 5. Calcular de que esta muestra:
- a) no salga ninguna mariposa con peligro de extinción,

Distribución geométrica

- Pruebas independientes repetidas
- X: se define como el número de la prueba en el que ocurre el primer éxito.
- p es probabilidad de éxito
- q=1-p

$$\mu(x) = \frac{1}{p}$$

$$p(X = x) = pq^{x-1}$$

x=0,1,2,3…n

$$\sigma_x^2 = \left[\frac{1-p}{p^2}\right]$$

Ejemplo

- Se sabe que en cierto proceso de fabricación uno de cada 100 artículos, en promedio, resulta defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que el quinto artículo que se inspecciona, en un grupo de 100, sea el primer defectuoso que se encuentra? Solución: Si utilizamos la distribución geométrica con x = 5 y p = 0.01,
- tenemos p(x) = $(0.01)(0.99)^4$ = 0.0096.

$$p(X = x) = pq^{x-1}$$

Ejercicio

En un estudio piloto se encontró que a 80% de las personas les gusta una sopa, calcule la probabilidad de que luego de entrevistas a 6 personas la 7 sea la primera en decir que le gusta la sopa.

Distribución binomial negativa

- El número X de ensayos necesarios para generar k éxitos.

$$p(X = x) = \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k}$$

Ejemplo

- La probabilidad de que una persona que vive en cierta ciudad tenga un perro es de 0.3. Calcule la probabilidad de que la décima persona entrevistada al azar en esa ciudad sea la quinta que tiene un perro.

$$p(X = x) = \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k}$$

$$p(X = x) = \binom{10-1}{5-1} 0.3^5 0.7^5 = 0.051$$

Ejercicio

- La probabilidad de que una persona gane un examen de estadística sin estudiar es de 0.1. Calcule la probabilidad de que la quinta persona examinada al azar en esa ciudad sea la cuarta que gane un examen sin estudiar.

Distribución Poisson

- Sucesos ocurren aleatoriamente
- x: el número de suceso x que ocurren en un cierto período (longitud, área, tiempo, volumen)
- $\lambda = parámetro\ de\ distribución = promedio\ de\ ocurrencia\ del\ suceso.$
- $p(x) = \frac{\lambda^x}{x!} * e^{-\lambda}$

$\mu(x) = \lambda$

$\sigma_x^2 =$

Ejemplo Poisson

- Durante un experimento de laboratorio el número promedio de partículas radiactivas que pasan a través de un contador en un milisegundo es 4. ¿Cuál es la probabilidad de que entren 6 partículas al contador en un milisegundo dado?

$$p(x) = \frac{4^6}{6!} * e^{-4} = 0.104$$

Ejercicio

- La cantidad de imperfecciones en láminas planas de vidrio de ciertas dimensiones tiene una distribución de Poisson con promedio de 1.5 ¿cuál es la probabilidad de observar más de dos imperfecciones en una de éstas láminas?

Variables continuas

Función de densidad para una variable continua

Sea X una variable aleatoria continua. Decimos que la función integrable y no negativa $f(x) : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ es la función de densidad de X si para cualquier intervalo (a, b) de $\mathbb{R}$ se cumple la igualdad

$$P(X \in (a, b)) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Es decir, la probabilidad de que la variable tome un valor dentro del intervalo (a, b) se puede calcular o expresar como el área bajo la función de densidad en el intervalo (a, b). De esta forma el cálculo de una probabilidad se reduce al cálculo de una integral. Por ejemplo, la función $f(x)$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } x \in (1, 3), \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

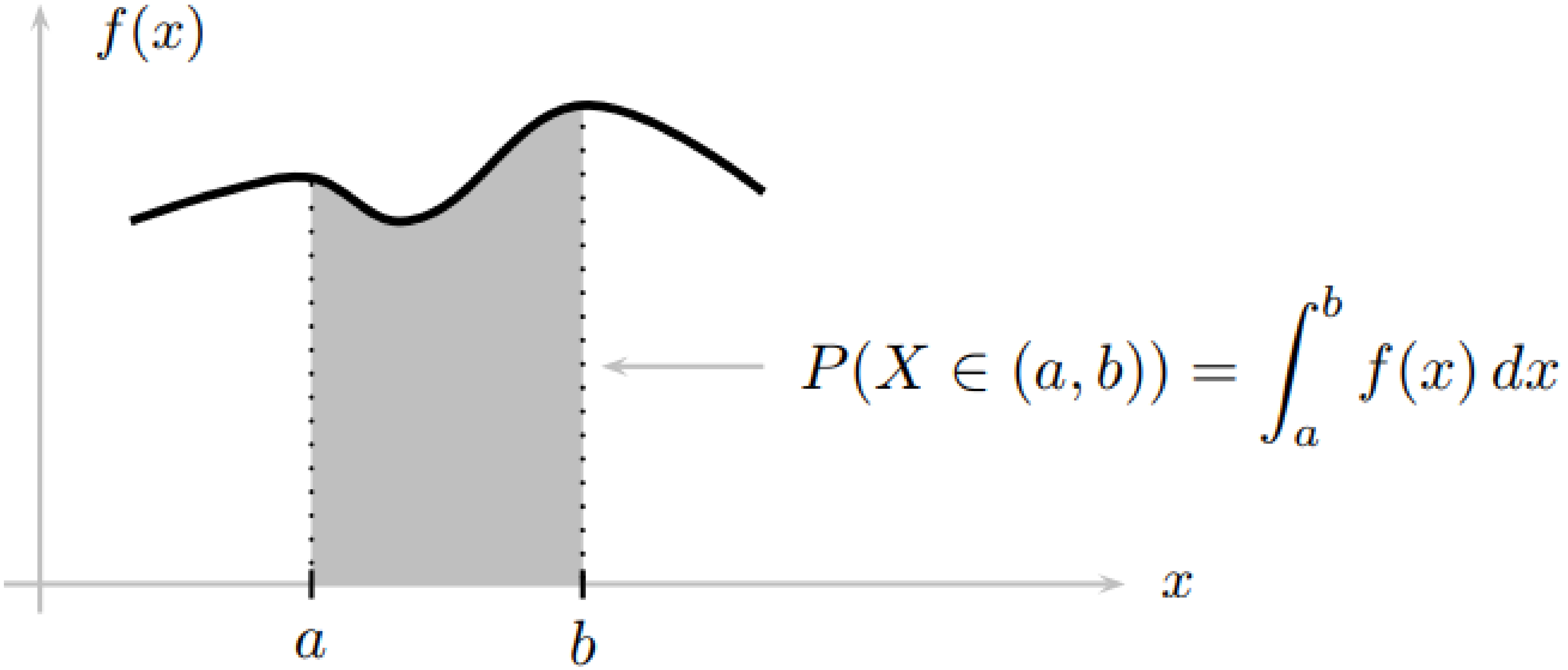
No es difícil comprobar que toda función de densidad $f(x)$ de una variable aleatoria continua cumple las siguientes propiedades:

a) $f(x) \geq 0, \quad$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$.

Estas dos propiedades se obtienen realmente de la definición de función de densidad para una variable continua. Efectivamente a $f(x)$ se le pide ser no negativa en la definición, además

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = P(X \in \mathbb{R}) = P(\Omega) = 1.$$


$f(x)$
$P(X \in (a,b)) = \int_a^b f(x)\,dx$
x
a
b

La función $f(x)$ es una **función de densidad de probabilidad** (fdp) para la variable aleatoria continua X, definida en el conjunto de números reales, si

1. $f(x) \geq 0$, para toda $x \in R$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$.
3. $P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)\, dx$.

Esperanza

La esperanza de una variable aleatoria X cuya función de densidad es $f(x)$, es un número denotado por $E(X)$ que se calcula como sigue

$$\mathrm{E}(X) = \begin{cases} \displaystyle\sum_x x f(x) & \text{si } X \text{ es discreta,} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx & \text{si } X \text{ es continua.} \end{cases}$$

Momentos

Investiga la definición de momentos para variable continua.

Esperanza de una función de una variable aleatoria

En algunos casos es necesario saber calcular la esperanza de una función de una variable aleatoria. Por ejemplo si X es una variable aleatoria entonces es claro que $Y = \exp(X^2)$ es una función de X. ¿Cuál será la esperanza de Y? El siguiente resultado es muy útil y nos dice cómo resolver este problema.

Proposición Sea X una variable aleatoria continua y sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $g(X)$ es una variable con esperanza finita. Entonces

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\, dx.$$

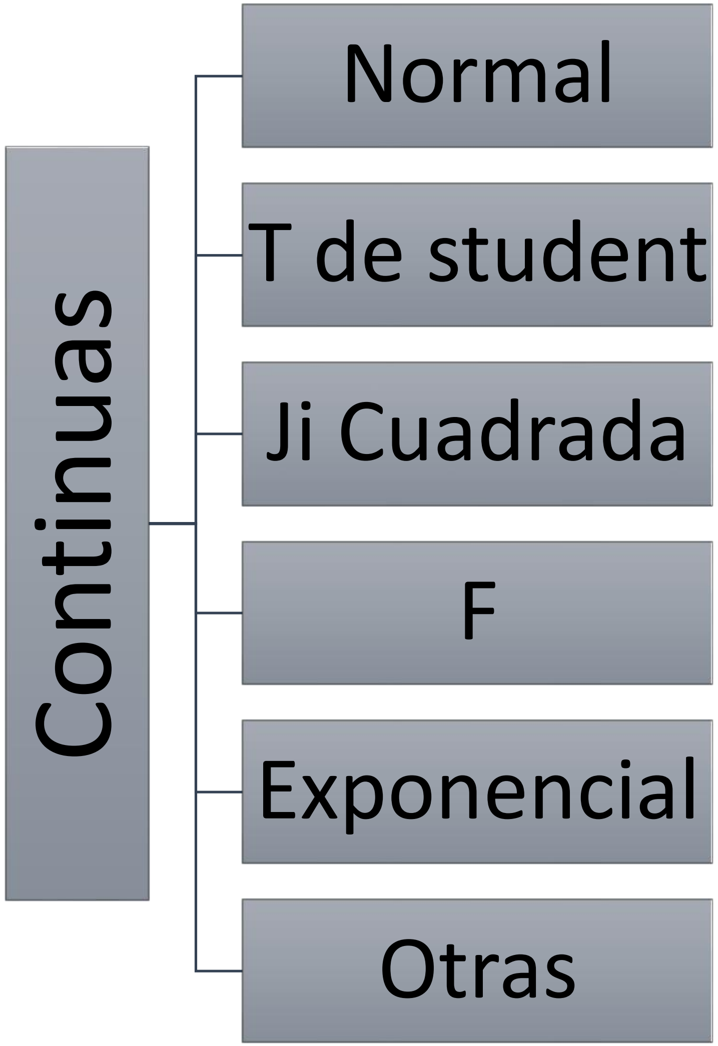
Proposición (Propiedades de la esperanza). Sea X con esperanza finita y sea c una constante. Entonces

a) $E(c) = c$.

b) $E(cX) = c\,E(X)$.

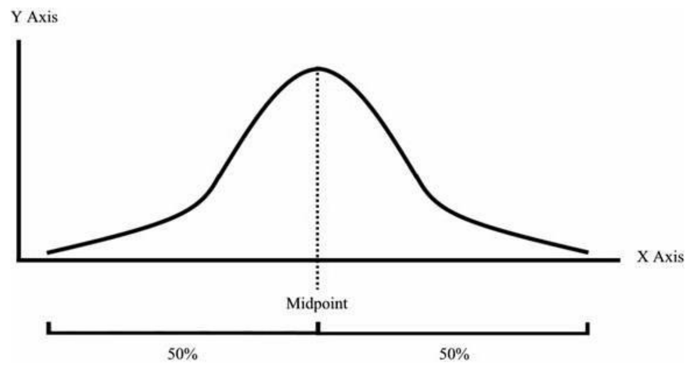
c) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

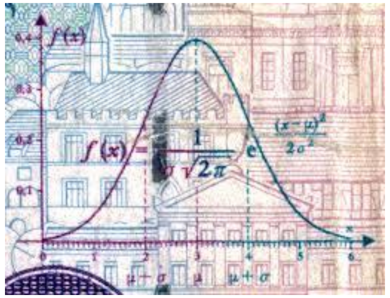
Continuas
Parte 1.



Distribución normal

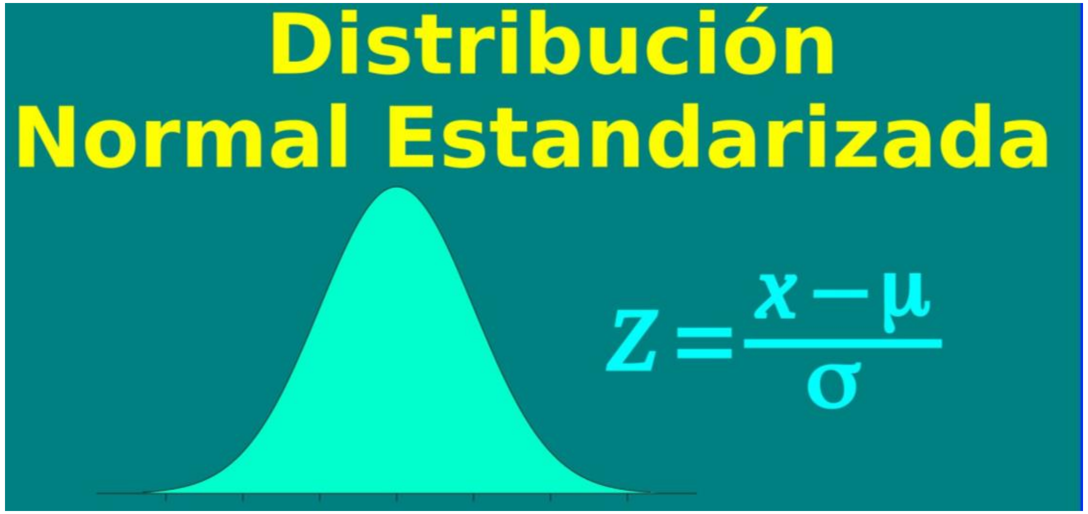
- Más común en los procesos naturales
- Simétrica
- Distribución Gaussiana
- Campana





Distribución normal

$$f(x)= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^{\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)}$$

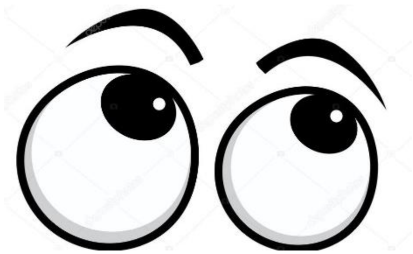


Media=0
Desviación estándar =1

Teorema del límite central

- Bajo ciertas condiciones, la distribución de probabilidad de la suma de un número grande de variables aleatorias se aproxima a una distribución normal.

A lo datos hay que aplicarles prueba de normalidad "siempre" no sólo "creer" que los datos son normales.



Z con factor de corrección para muestras

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Distribución t de student

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

$\infty < t < \infty$

- t del estudiante
- De 15 a 25 datos
- Menos de 10 “utilizar análisis estadístico no paramétrico”
- Recordar “que el tipo de distribución a seleccionar depende del problema que se tenga”

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

T de student

Distribución Gamma

- Tareas repetitivas

Gamma	$Gamma(\alpha,\beta)$
Densidad de probabilidad	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta^{-\alpha}x^{\alpha-1}e^{\frac{-x}{\beta}}}{\Gamma(\alpha)} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$ $\Gamma(\alpha)$ es la función gamma $\Gamma(\alpha)=\int t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ Si α es entero positivo $\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)!$

Distribución F

F en honor a R.A Fisher

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

Distribución F

- También se le conoce como **distribución F de Snedecor** (por George Snedecor) o como **distribución F de Fisher-Snedecor.**
- **Gran aplicación en Inferencia Estadística.**

Distribución Ji cuadradada

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(r/2)2^{r/2}} x^{r/2-1} e^{-x/2}$$

Caso especial de la distribución Gamma donde $\alpha=r/2$ y $\beta=2$